Die lokalen Formen zweiter und höherer Ordnung im dreidimensionalen Riemannschen Raume positiv-definiter Metrik und Elementarteilchen

MANFRED BÖRNER *

(Z. Naturforschg. **22 a**, 1835—1841 [1967]; eingegangen am 28. Juli 1967)

Im Anschluß an die Arbeit [1] werden die einfachsten Strukturen dieses Raumes untersucht. Sieht man nur diejenigen Raumstrukturen als identisch an, die bei orthogonalen Transformationen im lokalen System der Normalkoordinaten auseinander hervorgehen, so kann man eine Darstellung des metrischen Feldes angeben, in der, wie in der Arbeit [1] schon vermutet wurde, 6 unabhängige Komponenten von Pseudotensoren je Differentiationsstufe p die Struktur bestimmen. Die Theorie der orthogonalen Invarianten $I_s^{(p)}$ ($s=1, 2, 3$) dieser Pseudotensoren ermöglicht eine Klassifizierung. Das Invariantensystem niederster Ordnung $I_s^{(2)}$ führt darüber hinaus auf eine sofort als solche erkennbare physikalische Struktur, wenn man setzt $I_1^{(2)}=0$, $I_2^{(2)} \neq 0$, $I_3^{(2)}=0$: Die MAXWELLschen Gleichungen. Die Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ werden erkannt als Bestandteile des Krümmungstensors, der im Dreidimensionalen auf einen Krümmungstensor 2. Stufe abbildbar ist. Der gewöhnliche, reversible Zeitparameter t wird in einem Grenzprozeß eingeführt. Die Bedeutung der Invarianten für die Beschaffenheit weiterer elementarer physikalischer Strukturen und ihrer Wechselwirkungen wird besprochen.

1.

In einer vorangegangenen Arbeit [1] wurde die Vermutung ausgesprochen, daß der bei einer Forderung nach positiv-definiter, quadratischer Metrik auf einem affinen Raum sowie bei Vorgabe der Kompliziertheit der Struktur durch Angabe des höchsten TAYLOR-Entwicklungskoeffizienten der lokalen, endlichen Entwicklung nach Normalkoordinaten entstehende RIEMANNsche Raum V_3 äquivalent zum physikalischen Raum ist, wenn man den höchsten vorkommenden Entwicklungskoeffizienten der Normalkoordinaten-Entwicklung mit einem diskontinuierlichen Zeitparameter identifiziert. Für konstanten Zeitparameter existiert sogar nur eine einzige Struktur, wenn man die natürlichen Randbedingungen [vgl. [1], Gl. (38)] wählt.

Darüber hinaus wurde vermutet, daß die einfachsten Strukturen mit den elementarsten physikalischen Strukturen, den Elementarteilchen, identisch sind. Als Randbedingungen sind solche Werte des g_{ij}-Feldes zu wählen, wie sie in der realen Welt in großem Abstand von den elementaren Teilchen auftreten. Die Randbedingungen werden also im wesentlichen von der gesamten übrigen Welt erzeugt, die ihrerseits einem Zustand höheren Informationsgehaltes T [[1], Gl. (24)] entspricht.

Exakte Aussagen kann man erhalten, wenn man in [1] das System der Diff.-Gln. (24), (28) mit den genannten, aber nur unpräzise formulierbaren Randbedingungen löst.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie aus der Betrachtung der orthogonalen Invarianten des Linienelementes Aussagen über Teilchenstrukturen gewonnen werden können.

Insbesondere wird es sich zeigen, daß die γ-Quanten und das zugehörige MAXWELL-Feld den entarteten Strukturen niederster Ordnung entsprechen. Die MAXWELLschen Gleichungen für das Vakuum stellen die notwendigen Bedingungen dafür dar, daß die Metrik durch einen in zwei Vektoren zerfallenden Krümmungstensor charakterisiert werden kann. Die beiden Vektoren $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{B}_i$ genügen zusätzlich der invarianten Bedingung $\mathfrak{A}^i \mathfrak{B}_i = 0$.

2. Die Darstellung des Linienelementes zur Ordnung T in Normalkoordinaten

Zunächst schreibt man die Entwicklung des Maß-Tensors g_{ij} in Normalkoordinaten zum Zentrum $y^i=0$ zur Ordnung $T=4$ an [$g_{ij,k_1\ldots k_T} = 0$, [1], Gl. (24); $g_{ij,k_1} = g_{ij,k_1k_2k_3} = 0$, [1], Gl. (28)]:

$$g_{ij}(y) = g_{ij}(0) + \frac{1}{2!}\, g_{ij,k_1k_2}\, y^{k_1} y^{k_2} . \tag{1}$$

Die g_{ij,k_1k_2} sind sogenannte Normaltensoren [2]. Im dreidimensionalen RIEMANNschen Raume V_3 hat g_{ij,k_1k_2} wegen den BIANCI-Identitäten äquivalenten

* 7900 Ulm/Donau, Sylvanerweg 4.

[1] M. BÖRNER, Z. Naturforschg. **22 a**, 1825 [1967].

[2] O. VEBLEN u. T. Y. THOMAS, The Geometry of Paths, Trans. Am. Math. Soc. **25**, 551 [1923].

Bedingungen jedoch nur sechs unabhängige Komponenten, die wir explizite anschreiben wollen:

$$g_{11,22} = g_{22,11} = -2\, g_{12,12}, \tag{2 a}$$

$$g_{22,33} = g_{33,22} = -2\, g_{23,23}, \tag{2 b}$$

$$g_{33,11} = g_{11,33} = -2\, g_{13,13}, \tag{2 c}$$

$$g_{11,23} = g_{23,11} = -2\, g_{12,13} = -2\, g_{13,12}, \tag{2 d}$$

$$g_{22,13} = g_{13,22} = -2\, g_{12,23} = -2\, g_{23,12}, \tag{2 e}$$

$$g_{33,12} = g_{12,33} = -2\, g_{13,23} = -2\, g_{23,13}. \tag{2 f}$$

Alle übrigen Komponenten verschwinden, mit Ausnahme derjenigen, die man wegen der Identiäten

$$g_{ij,k_1k_2} = g_{ji,k_1k_2} = g_{ij,k_2k_1} \tag{3}$$

aus Gl. (2) ableiten kann. Diese Beziehungen sind invariant bei beliebigen linearen Transformationen der Normalkoordinaten y^i, das heißt bei beliebigen affinen Transformationen der affinen Koordinaten x^i. Für das Linienelement findet man nach einiger Rechnung folgende Form:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{ij}(0)\, dy^i\, dy^j & \\ - \frac{1}{2!}\, [& g_{23,23}\, \Delta y^{23}\, \Delta y^{23} + g_{31,31}\, \Delta y^{31}\, \Delta y^{31} \\ & + g_{12,12}\, \Delta y^{12}\, \Delta y^{12} \\ & + 2\, g_{23,31}\, \Delta y^{23}\, \Delta y^{31} + 2\, g_{31,22}\, \Delta y^{31}\, \Delta y^{12} \\ & + 2\, g_{12,23}\, \Delta y^{12}\, \Delta y^{23}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei ist

$$\Delta y^{23} = y^2\, dy^3 - y^3\, dy^2 = -\Delta y^{32}, \tag{5 a}$$

$$\Delta y^{31} = y^3\, dy^1 - y^1\, dy^3 = -\Delta y^{13}, \tag{5 b}$$

$$\Delta y^{12} = y^1\, dy^2 - y^2\, dy^1 = -\Delta y^{21}. \tag{5 c}$$

Die Größen Δy^{ij} transformieren sich bei orthogonalen Transformationen wie ein Vektor, wie man leicht nachrechnen kann. Da ds^2 eine Invariante ist, müssen sich die g_{ij,k_1k_2} im Dreidimensionalen auf einen bei orthogonalen Transformationen im Koordinatensystem der Normalkoordinaten wie ein symmetrischer Tensor der Stufe 2 transformierenden kovarianten Tensor dieser Stufe abbilden lassen.

Wir schreiben dann:

$$\Delta y^1 = \Delta y^{23},\quad \Delta y^2 = \Delta y^{31},\quad \Delta y^3 = \Delta y^{12} \tag{6 a, b c}$$

und

$$G_{11} = g_{23,23},\quad G_{22} = g_{31,31},\quad G_{33} = g_{12,12}, \tag{7 a, b, c}$$

$$G_{12} = g_{23,31} = g_{31,23} = G_{21}, \tag{7 d}$$

$$G_{23} = g_{31,12} = g_{12,31} = G_{32}, \tag{7 e}$$

$$G_{31} = g_{12,23} = g_{23,12} = G_{13}. \tag{7 f}$$

Dann erhalten wir statt der Form Gl. (4)

$$ds^2 = g_{ij}(0)\, dy^i\, dy^j - \frac{1}{2!}\, G_{ij}\, \Delta y^i\, \Delta y^j. \tag{8}$$

Läßt man die Gruppe der orthogonalen Transformationen mit der Determinante $+1$ zu, so gelangen wir zu folgender Normalform:

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}\, d\bar{y}^1\, d\bar{y}^1 + g_{22}\, d\bar{y}^2\, d\bar{y}^2 + g_{33}\, d\bar{y}^3\, d\bar{y}^3 \\ - \frac{1}{2!}\, \bar{G}_{ij}\, \overline{\Delta y}^i\, \overline{\Delta y}^j. \end{aligned} \tag{9}$$

Auf dieser Normalform können wir jetzt das Studium möglicher Strukturen 2. Ordnung aufbauen.

Für die Strukturen höherer Ordnung hatten wir gezeigt [1], daß die Normaltensoren $g_{ij,k_1\ldots k_p}$ (p gerade) wahrscheinlich unabhängig von p im Dreidimensionalen 6 unabhängige Komponenten besitzen, wenn man die Forderung nach einem positiv-definiten Linienelement erhebt.

Nun ist es für die Betrachtung möglicher Linienelement-Strukturmannigfaltigkeiten sinnvoll, nur solche als identisch anzusehen, die bei orthogonalen Transformationen aus einander hervorgehen. Beschränkt man sich auf solche Transformationen, so kann man leicht die Darstellung des Linienelementes angeben, die in jeder Ordnung p (p gerade) 6 nichtverschwindende, mit einander wie ein symmetrischer, kovarianter Tensor zweiter Stufe transformierende Komponenten besitzt. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \Delta^{(p)} y^{i+1,\, i-1} = \Delta^{(p)} y^i = y^{i+1}\, \Delta^{(p-2)} y^{i-1} \\ - y^{i-1}\, \Delta^{(p-2)} y^{i+1} \end{aligned} \tag{10}$$

$$(p = 2, 4, \ldots;\quad i = 1, 2, 3, \text{zyklisch})$$

mit

$$\Delta^{(0)} y^i = dy^i \tag{11}$$

und

$$\Delta^{(2)} y^i = y^{i+1}\, dy^{i-1} - y^{i-1}\, dy^{i+1} = \Delta y^i, \tag{12}$$

so erkennt man leicht, daß $\Delta^{(p)} y^i$ ein Vektor ist, wenn $\Delta^{(p-2)} y^i$ einer ist. Da nun $\Delta^{(0)} y^i = dy^i$ sicherlich bei orthogonalen Transformationen wie ein Vektor transformiert wird, ist auch für beliebige Ordnung p dieses erwiesen. Die Form Gl. (13)

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{11}\, dy^1\, dy^1 + g_{22}\, dy^2\, dy^2 + g_{33}\, dy^3\, dy^3 \\ - \frac{1}{2!}\, G_{ij}^{(2)}\, \Delta^{(2)} y^i\, \Delta^{(2)} y^j - \frac{1}{4!}\, G_{ij}^{(4)}\, \Delta^{(4)} y^i\, \Delta^{(4)} y^j - \ldots \\ - \frac{1}{(T-2)!}\, G^{(T-2)}\, \Delta_{ij}^{(T-2)}\, y^i\, \Delta_{ij}^{(T-2)}\, y^j \end{aligned} \tag{13}$$

stellt dann sicherlich die nur im Dreidimensionalen mögliche orthogonal-invariante Schreibweise des Linienelementes aus einer Folge von Differentialformen 2. Ordnung dar. Die $G_{ij}^{(p)}$ ($p = 2, 4, \ldots, T-2$)

sind sicherlich Tensoren 2. Stufe, da ds^2 eine Invariante ist. Sie besitzen, wie es für eine positiv-definite Form als wahrscheinlich dargestellt wurde [1], in jeder Differentiationsstufe der Entwicklung nach Normalkoordinaten 6 von einander unabhängige, wie ein symmetrischer Tensor transformierende Komponenten. Die Beschränkung auf solche Transformationen, die im lokalen System der Normalkoordinaten orthogonal sind, ist wahrscheinlich notwendig, wenn man im Bereich der positiv-definiten Formen bleiben will.

So, wie die Differentiale höherer Ordnung sich nach Gl. (10) auf solche niederer Ordnung im Dreidimensionalen abbilden lassen, müssen das auch die Normaltensoren in Gl. (13)

$$g_{kl,k_1\dots k_s} \to G_{ij}^{(s)} \tag{14}$$

nach Gl. (14) tun. Im Augenblick erscheint es noch schwierig, das explizit durchzuführen.

Immerhin kann man jetzt folgendes sagen: Die möglichen differentialgeometrischen Strukturen des Linienelementes wird man durch die orthogonalen Invarianten der Form nach Gl. (13) und ihrer Unterformen 2. Ordnung charakterisieren können, und diese Invarianten müssen, wenn unsere Vorstellungen von einer vollständigen Geometrisierung der physikalischen Welt richtig sind, eine unmittelbare physikalische Bedeutung haben.

3. Die orthogonalen Invarianten zur Ordnung $T=4$

Die niederste nichttriviale Ordnung des Linienelementes hat eine Darstellung nach Gl. (9). Diese Darstellung gilt zunächst für ein beliebiges Entwicklungszentrum $y^i=0$ (bzw. $x^i=x_0{}^i$ in allgemeinen affinen Koordinaten [1]). Für jedes Entwicklungszentrum gilt darüber hinaus

$$I_1^{(0)} = \mathrm{Det}\,|g_{ii}| = g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33} > 0\,, \tag{15}$$

da wir ja eine positiv-definite Form voraussetzen können. Geometrisch bedeutet das, daß für $y^i=0$ die Form Gl. (9) nicht als Produkt von zwei Linearformen dargestellt werden kann. Nun nehmen wir an, daß wir genügend weit ab von einem starken Einflusse des $G_{ij}^{(2)}$-Feldes sind, $G_{ij}^{(2)}$ $(y^i=0)$ also in unserem Entwicklungspunkte y_0^i klein verglichen mit g_{ij} $(y_i=0)$ ist. Dann wollen wir das Verhalten der Struktur zur $T=4$. Ordnung im nahezu euklidischen Raume studieren. Es gelte also weiterhin

$$g_{11} \approx g_{22} \approx g_{33} \approx g\,(1+\varepsilon(x^i)\,\delta_{ij}) \approx g\,,\quad \varepsilon \ll 1. \tag{16}$$

Die zugehörigen zwei anderen orthogonalen Invarianten haben den Wert

$$I_2^{(0)} = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{22} & 0 \\ 0 & g_{33} \end{vmatrix} \approx 3\,g^2 \tag{17}$$

und

$$I_3^{(0)} = g_{11} + g_{22} + g_{33} \approx 3\,g\,. \tag{18}$$

Es existiert also eigentlich nur eine einzige Invariante. Gl. (16) gestattet die volle orthogonale Gruppe, die wir wegen der Abbildung Gl. (10) (Pseudovektoren) auf die mit der Determinante $+1$ beschränken wollen. Die Invarianten unter dieser Gruppe zum Tensor $G_{ij}=G_{ij}^{(2)}$ sollen im folgenden betrachtet werden.

Die Invarianten lauten:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} = I_1^{(2)}, \tag{19}$$

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{22} & G_{23} \\ G_{23} & G_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G_{33} & G_{13} \\ G_{13} & G_{11} \end{vmatrix} = I_2^{(2)}, \tag{20}$$

$$G_{11} + G_{22} + G_{33} = I_3^{(2)}. \tag{21}$$

Die Stabilitätsbedingung für die Form 2. Ordnung in $y^i\,y^j$ lautet:

$$I_1^{(2)} \neq 0\,. \tag{22}$$

Ist $I_1^{(2)}=0$, so ist die Form der G_{ij} als Produkt von zwei Formen niederer Ordnung darstellbar, insbesondere der Tensor G_{ij} (das heißt der Normaltensor g_{ji,k_2k_1}) durch zwei Vektoren

$$G_{ij} = \tfrac{1}{2}\,(A_i\,B_j + A_j\,B_i) \tag{23}$$

und damit wird dann

$$G_{ij}\,\Delta y^i\,\Delta y^j = (A_i\,\Delta y^i)\,(B_j\,\Delta y^j)\,. \tag{24}$$

Eine Klassifizierung der G_{ij}-Zustände hat alle möglichen, nichtäquivalenten Kombinationen der drei orthogonalen Invarianten zu berücksichtigen. Dabei wollen wir uns an folgendes halten: Die lokale Aussage, eine der Invarianten sei Null, möge für den gesamten Raum gelten. Im wesentlichen wird das dadurch erreicht, daß jede Bedingung $I_l^{(s)}=0$ kovariant mit Hilfe der Normaltensoren $g_{ij,k_1\dots k_s}$ in allgemeinen, affinen Koordinaten ausdrückbar ist, zum Beispiel also auch die Aussage nach Gl. (23), die das Verschwinden von $I_1^{(2)}$ zur Voraussetzung hat.

Die Tab. 1 a, 1 b, 1 c zeigen die $3^3=27$ unterschiedlichen Strukturen, die man durch einen positiven, verschwindenden oder negativen Wert jeder der drei Invarianten darstellen kann. Die Unterteilung ist im Hinblick auf späteres gemacht worden.

	$I_1^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$I_3^{(2)}$	
0,0	0	0	0	(strukturloser Raum)

Tab. 1 a.

	$I_1^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$I_3^{(2)}$		$I_1^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$I_3^{(2)}$
0,1	0	0	+	$0,\bar{1}$	0	0	—
0,2	0	+	0	$0,\bar{2}$	0	—	0
0,3	0	+	—	$0,\bar{3}$	0	—	+
0,4	0	+	+	$0,\bar{4}$	0	—	—

Tab. 1 b.

	$I_1^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$I_3^{(2)}$		$I_1^{(2)}$	$I_2^{(2)}$	$I_3^{(2)}$
1,1	+	0	0	$1,\bar{1}$	—	0	0
1,2	+	0	—	$1,\bar{2}$	—	0	+
1,3	+	0	+	$1,\bar{3}$	—	0	—
1,4	+	—	0	$1,\bar{4}$	—	+	0
1,5	+	+	0	$1,\bar{5}$	—	—	0
1,6	+	—	—	$1,\bar{6}$	—	+	+
1,7	+	—	+	$1,\bar{7}$	—	+	—
1,8	+	+	—	$1,\bar{8}$	—	—	+
1,9	+	+	+	$1,\bar{9}$	—	—	—

Tab. 1 c.

Um einen Anhaltspunkt für die Zuordnung der differentialgeometrischen Strukturen zu den durch sie möglicherweise erklärten physikalischen Teilchen zu erhalten, ist es notwendig, explizite Rechnungen anzustellen.

4. Die Struktur $I_1^{(2)}=0$, $I_2^{(2)}\neq 0$, $I_3^{(2)}=0$.

Die Gleichung

$$I_1^{(2)}=0 \tag{25}$$

und die daraus resultierende Gl. (23) wollen wir als Ausgangspunkt nehmen, eine spezielle Struktur nach Tab. 1 b zu untersuchen. Speziell noch betrachten wir die Struktur 0.2 bzw. $0.\bar{2}$, bei der

$$I_3^{(2)}=0 \tag{26}$$

zusätzlich gilt.

Mit Gl. (23) ergibt sich im einzelnen für die Invarianten:

$$I_2^{(2)}=-\tfrac{1}{4}\,|\,\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\,|^2 \tag{27}$$

und

$$I_3^{(2)}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=0 \tag{28}$$

oder, mit Gl. (28),

$$I_2^{(2)}=-\tfrac{1}{4}\,\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}^2. \tag{29}$$

Die Größe $I_2^{(2)}$ ist eine Funktion der affinen Koordinaten x^i. Wie wir nun aus [1] wissen, können sich unterschiedliche Unterzustände 2. Ordnung $I_2^{(2)}(x^i)$ nur durch unterschiedliche Randbedingungen ergeben. Die Lösung $g_{ij}(x^i)$ ist ja durch die Randwerte eindeutig bestimmt. Diese Randbedingungen für die Struktur 2. Ordnung ($T=4$) sind im allgemeinen die Folge einer Reihe unterschiedlicher Zustände sehr viel höherer Ordnung ($T\gg 1$) T, $T+2,\ldots,T+2\,t$, die den Gesamtkosmos, einschließlich des betrachteten Unterzustandes 2. Ordnung charakterisieren und die durch die natürlichen Randbedingungen [[1], Gln. (38 a) ... (38 d)] eindeutig festgelegt sind. Ist aber $T\gg 1$, so sind die Änderungen der Randbedingungen von Zustand T zu Zustand $T+2$ usw. sicher sehr klein, so daß auch mit Gl. (16) weiterhin allein der nur ein wenig geänderte Tensor $G_{ij}(y^i)\to g_{ji,k_1k_2}(x^i)$ einen Zustand 2. Ordnung beschreibt.

Es ist naheliegend, zu vermuten, daß dieser Unterzustand 2. Ordnung bei wenig und nur in großem Abstand von der Unterstruktur sich ändernden Randbedingungen (isolierte Unterstruktur) dadurch gekennzeichnet ist, daß zwar nicht $(I_2^{(2)})_T$, aber sicherlich das Integral

$$S_T=\int_{-\infty}^{+\infty}(I_2^{(2)})_T\,\mathrm{d}V \tag{30}$$

über den gesamten affinen Raum von Zustand T zu Zustand $T+2,\ldots,T+2\,t$ praktisch unveränderlich ist. Wir schreiben dafür

$$(S_{T+\Delta T}-S_T)/\Delta T=0\,. \tag{31}$$

Nun vermuteten wir schon [1], daß ΔT in der Größenordnung von 10^{-23} Sekunden liegt. Bei allen Prozessen, die lang gegen dieses Elementarzeitintervall ΔT andauern und die Strukturen betreffen, die sich von Ordnungszahl T zu $T+2$ praktisch kaum ändern, ist es sicher erlaubt, folgenden Grenzübergang zu machen:

$$\lim_{\Delta T\to 0}\frac{S_{T+\Delta T}-S_T}{\Delta T}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,S_T\,. \tag{32}$$

Die Bedingung, daß sich $S_{T+\Delta T}$ sehr wenig von S_T unterscheidet, ist sicherlich erfüllt, wenn T sehr groß und etwa, wie wir vermuten, bei $T\sim 10^{79}$ liegt. Aus den Gln. (30) und (32) folgt dann als Bedingung für die möglichen Unterstrukturen bei Entartung $I_1^{(2)}=I_3^{(2)}=0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty}I_2^{(2)}\,\mathrm{d}V=0\,. \tag{33}$$

Mit Gl. (29) folgt daraus sofort

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}^2\,\mathrm{d}V = 0 \tag{34}$$

und mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\mathrm{grad} \tag{35}$$

weiter

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\mathfrak{B}^2\,\mathfrak{A}\cdot\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\mathrm{grad}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\cdot[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\Big]\,\mathrm{d}V. \tag{36}$$

Als Lösungen des Variationsproblems sind Gleichungen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gesucht, die mit Gl. (36) verträglich sind.

Zunächst führen wir die folgenden Beziehungen ein, von denen wir am Schlusse feststellen müssen, ob sie mit den gefundenen Lösungen harmonieren. Wir schreiben

$$\mathfrak{B}^2(x^i,t) = Z^2\,\mathfrak{A}^2(x^i,t), \tag{37}$$

$$\mathfrak{v} = c\,\frac{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]}{|[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]|} = c\,\frac{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}^2}} = \frac{c}{Z}\cdot\frac{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]}{\mathfrak{A}^2}. \tag{38}$$

Die Beträge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien also in jedem Punkte des affinen Raumes einander proportional, die rein räumliche Ortsverschiebung $\mathfrak{v}$ (pro Zeitintervall) sei proportional dem Einheitsvektor, der senkrecht auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ steht. Mit den Gln. (37) und (38) folgt aus Gl. (36):

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}^2\left[Z^2\,\mathfrak{A}\cdot\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{B}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} + c\,\frac{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]}{Z\,\mathfrak{A}^4}\cdot\mathrm{grad}\{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\cdot[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\}\right]\mathrm{d}V. \tag{39}$$

Jetzt beachten wir, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{div}\{[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\,[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\cdot[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\}\,\mathrm{d}V \tag{40}$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]^2\,\mathrm{div}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\,\mathrm{d}V + \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\cdot\mathrm{grad}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]^2\,\mathrm{d}V = \int_{F\infty} [\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]^2\,[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\cdot\mathrm{d}F = 0$$

als Oberflächenintegral über eine sehr weit entfernte Oberfläche F, auf der die Struktur 2. Ordnung, genauer $|\mathfrak{A}|$ und damit $|\mathfrak{B}|$ stärker wie $1/r^{1/3}$ verschwunden ist, ebenfalls verschwindet.

Dann kann man also schreiben

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}^2\left[Z^2\,\mathfrak{A}\cdot\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{B}\cdot\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} - c\,Z\,\mathrm{div}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]\right]\mathrm{d}V \tag{41}$$

oder mit

$$\mathrm{div}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{B} \tag{42}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\mathfrak{A}^2\,\mathfrak{A}\cdot\left[Z^2\,\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} + c\,Z\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}\right] + \mathfrak{A}^2\,\mathfrak{B}\cdot\left[\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} - c\,Z\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\right]\right\}\mathrm{d}V. \tag{43}$$

Soll dieses Integral unabhängig von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschwinden, so muß offenbar gelten

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{B} = -\frac{1}{c}\,Z\,\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}, \tag{44}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = +\frac{1}{c}\,\frac{1}{Z}\,\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}. \tag{45}$$

Mit

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad Z\,\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{H} \tag{46, 47}$$

folgt die übliche Darstellung der MAXWELLschen Gleichungen des Vakuums für das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ und das magnetische Feld $\mathfrak{H}$. Insbesondere sind auch die Bedingungen Gln. (37) und (38) erfüllt, sowie die Bedingung für das Verschwinden des Integrals Gl. (40).

Die zur Invariante $I_2^{(2)} = -\frac{1}{4}[\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}]^2$ gehörenden entarteten und isolierten Raumstrukturen verhalten sich also bezüglich der „Zeit“-Folge möglicher Strukturen wie das MAXWELLsche Feld ohne Ladungen. Im Sinne einer Klassifizierung von physikalischen Elementarzuständen hat man es mit γ-Quanten zu tun, die damit in sehr befriedigender Weise am Anfang eines Teilchenschemas erscheinen.

Wir bemerken noch, daß mit unserem Zeit-Parameter t nach den Gln. (44) und (45) Zeitpunkt für Zeitpunkt, das heißt Unterstruktur für Unterstruktur von einander unabhängige, nicht „kausal“ verkettete Strukturen beschrieben werden. Die Zeitordnung tritt nur in den außerhalb der Unterstrukturen 2.

Ordnung liegenden, die Randbedingungen dieser Unterstrukturen bestimmenden Welt auf, als zu benachbarten Randbedingungen bezüglich T benachbarte Gesamtstrukturen gehören, in denen man zum Beispiel die „Fortentwicklung" des MAXWELLschen Feldes 2. Ordnung registrieren kann.

Bei unserer Ableitung der MAXWELLschen Gleichungen sieht man übrigens deutlich, an welcher Stelle man auf die Irreversibilität der Zeitfolge verzichtet: Sie kommt abhanden durch die den Grenzübergang Gl. (32) ermöglichenden Vernachlässigungen.

Die Bedingungen Gln. (44) und (45) müssen notwendig eingehalten werden, damit das Feld der $g_{ij}(x^i)$ von zwei Krümmungsvektoren A_i, B_i mit $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=0$ in den Zuständen $T, \ldots, T+2t$ $(0 \ll t \ll T)$ in einem isolierten Gebiete 2. Ordnung bestimmt ist. Wie die Vektoren A_i, B_i mit den $g_{ij}(x^i)$ zusammenhängen und welche zusätzlichen Bedingungen ($\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$, $\operatorname{div}\mathfrak{E}=0$) dann noch auftreten, wird in einer folgenden Arbeit untersucht.

5. Verallgemeinerungen

Im vorangegangenen Abschnitt war es gelungen, die Struktur $0.\overline{2}$ aus Tab. 1 b dem MAXWELLschen Feld und damit dem γ-Quant zuzuordnen. In entsprechender Weise sollte so etwas für sämtliche Invarianten und deren Kombinationen möglich sein. Im Zusammenhang mit der Struktur, die zum elektromagnetischen Feld führt, ist jedoch zunächst folgende Bemerkung wichtig: In Tab. 1 b hatten wir als mögliche Struktur auch die mit $I_1^{(2)}=0$, $I_2^{(2)}>0$, $I_3^{(2)}=0$ (0.2) angesehen. Nach Gl. (29) würde das aber bedeuten, daß die zugehörigen Felder nicht reell sind. Das ist sicherlich auszuschließen. Auch unter den übrigen Srtukturen der Tab. 1 muß man noch mit weiteren nichtreellen Feldern rechnen, so daß eine Abzählung der wirklich durch die Invarianten dargestellten reellen Strukturen 2. Ordnung noch nicht möglich ist. Die Zahl Z_2 dieser Strukturen ist sicherlich kleiner als $3^3=27$:

$$Z_2 < 27\,. \tag{48}$$

Nimmt man Teilchen und Antiteilchen als unterschiedliche Zustände, so würden unter dieser Menge noch alle bekannten Leptonen und zunächst auch die Mesonen unterzubringen sein.

Das Auftreten von im differentialgeometrischen Sinne zerfallenden Strukturen ($I_1^{(2)}=0$ bei $T=4$) gibt jedoch Anlaß zur folgenden Spekulation:

Auch die höheren Ordnungen von Strukturen ($T=6, 8, \ldots$) sind nach Gl. (13) durch die gleichen Arten von Invarianten $I_1^{(p)}$, $I_2^{(p)}$, $I_3^{(p)}$ (allgemein $p=0, 2, 4, \ldots, T-2$) gekennzeichnet; sie betreffen nur höhere Differentiationsstufen (Ordnungen) der Normaltensoren, die abgebildet sind auf Pseudotensoren der Stufe 2, $G_{ij}^{(p)}$ $(p=0,2,\ldots,T-2$, $G_{ij}^{(0)}=g_{ij}(0))$. Dann bedeutet offenbar

$$I_1^{(p)}=0 \tag{49}$$

wie im Fall $p=2$ auch bei beliebigem $p>2$, daß die Normaltensoren $g_{ij,k_1\ldots k_p}$ zerfallen. Wir können vermuten, daß die Zerfallsprodukte der Normaltensoren unabhängige Strukturen niederer Ordnung, also physikalisch gesehen einfachere Teilchen darstellen. Die „Zeit"-Folge der Randbedingungen würde, wie beim MAXWELLschen Felde, die Fortentwicklung dieser Teilstrukturen ergeben. Nur sollte es im Gegensatz zum MAXWELLschen Felde möglich sein, daß die Bruchstücke sich trennen, und nicht wie das elektrische und magnetische Feld zusammen bleiben. Doch das ist leicht denkbar: Die Aufspaltung von Tensoren höherer Ordnung $(T\geqq 6)$ führt zu Tensoren niederer Ordnung $(T\geqq 4)$ der Darstellung, und die hierzu gehörigen Differentialformen 2. Ordnung besitzen wieder eigene Invarianten! Beim elektro-magnetischen Felde gibt es hingegen keine kleineren Ordnungen mit eigenen Invarianten für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$, wie wir im letzten Abschnitt sahen.

Alle diese Prozesse müssen in Analogie zum MAXWELLschen Fall durch die folgenden Erhaltungssätze beherrscht werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} I_k^{(p)}\,\mathrm{d}V=0 \;\; (p=0,2,\ldots,T-2)\,. \tag{50}$$

k durchläuft alle Indizes 1, 2, 3, für welche nicht eine Bedingung

$$I_s^{(p)}=0 \tag{51}$$

gilt ($s=$ keine, eine oder mehrere Zahlen aus 1, 2, 3). Bei Betrachtung sehr schneller Zerfälle (Meson-, Baryonresonanzen) ist ein Grenzübergang entsprechend Gl. (32) sicherlich problematisch.

Nunmehr ist die Zuordnung von physikalischer Struktur zur differentialgeometrischen qualitativ sehr einfach:

Stabile Teilchen sind solche, die nicht zerfallen, also alle mit $I_1^{(p)} \neq 0$ $(p=0,2,\ldots,T-2)$ und ohne „überzählige" Invarianten $I_2^{(p)}$, $I_3^{(p)} \neq 0$, die sie „abgeben" können im Sinne der Gln. (50) und (51). Hinzu kommen mit $I_1^{(2)}=0$ zwei weitere Teilchen: $I_2^{(2)}<0$, $I_3^{(2)}=0$ (γ-Quant) und $I_2^{(2)}=0$, $I_3^{(2)}\lesseqgtr 0$, wahrscheinlich (s. u.) das Neutrino mit dem Antineutrino.

$I_1^{(2)}\lesseqgtr 0$, $I_2^{(2)}=0$, $I_3^{(2)}=0$ könnte das stabile Elektron (Positron) sein, $I_1^{(4)}\lesseqgtr 0$ entsprechend das Proton (Antiproton).

Durch Addition von Invarianten $I_2^{(p)}$, $I_3^{(p)}$ [wieder im Sinne der Gln. (50), (51)] kann man zu „angeregten" Zuständen gelangen.

Zustände, die in viele Teile zerfallen, sind durch Invarianten $I_2^{(p)}\neq 0$, $I_3^{(p)}\neq 0$ $(p\gg 2)$ gekennzeichnet, ohne daß dort $I_1^{(p)}\neq 0$ für großes p wäre.

Tabelle 1 b würde dann das Neutrino (0.1, $0.\bar{1}$), das γ-Quant ($0.\bar{2}$) und eine Kombination von beiden zeigen. Tabelle 1 c sicherlich nur noch Leptonen (Elektron 1.1, $1.\bar{1}$?), da die Mesonen erfahrungsgemäß in viel mehr Bruchstücke zerfallen, als durch die Ordnung $T=4$ darstellbar wären.

Vielmehr wäre für die Mesonen $T=6, 8, \ldots$ bei $I_1^{(4)}=I_1^{(6)}=\ldots=0$.

Für die Neutrino-Struktur von $I_1^{(2)}=I_2^{(2)}=0$, $I_3^{(2)}\lesseqgtr 0$ spricht folgendes: Addiert man das $G_{ij}^{(2)}$-Feld dieses Zustandes in Normalkoordinaten zum $G_{ij}^{(2)}$-Feld eines beliebigen Teilchens hinzu (im Aufpunkt der Normalkoordinaten-Entwicklung), was in erster Näherung sicher das richtige Gesamtfeld $G_{ij}^{(2)}$ liefert, wenn die beiden Teilchen weit sowohl voneinander als auch vom Aufpunkt $y^i=0$ entfernt sind, so ist die neue lokale Feldinvariante

$$I_3^{(2)}=G_{11}^{(2)}+G_{22}^{(2)}+G_{33}^{(2)}$$

einfach die Summe der beiden Invarianten, die zum Neutrino und dem beliebigen anderen Teilchen gehören. Das wäre bei den Invarianten $I_1^{(2)}$ und $I_2^{(2)}$ nicht der Fall, hier treten Wechselwirkungsglieder auf. In erster Näherung $T-2=2$ zeigt die Struktur $I_1^{(2)}=I_2^{(2)}=0$, $I_3^{(2)}\neq 0$ also keine geometrische „Wechselwirkung", was sehr gut mit der sehr schwachen physikalischen Wechselwirkung des Neutrino-Feldes zusammenpaßt. Wahrscheinlich existieren Neutrino und γ-Quant aus diesem Grunde im Zustand 0.4, $0.\bar{4}$ (Tab. 1 b) sogar völlig unabhängig voneinander, da alle $I_s^{(4)}=0$ sind.

Alle diese Spekulationen können nur Anlaß sein, ähnlich wie im Falle des Maxwellschen Feldes, Einzeluntersuchungen anzuschließen.

Immerhin zeigt sich deutlich, daß wir es hier mit Strukturmannigfaltigkeiten zu tun haben, die durchaus in der Lage erscheinen, die gegenwärtig so unverständlichen Eigenschaften von Elemetarteilchen wiederzugeben.